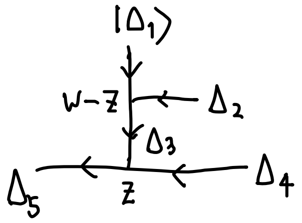
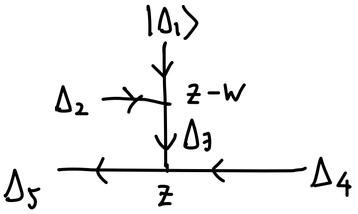
名古屋創 共形場理論とPainlevé方程式 3/4

2018-05-10　黒木玄記



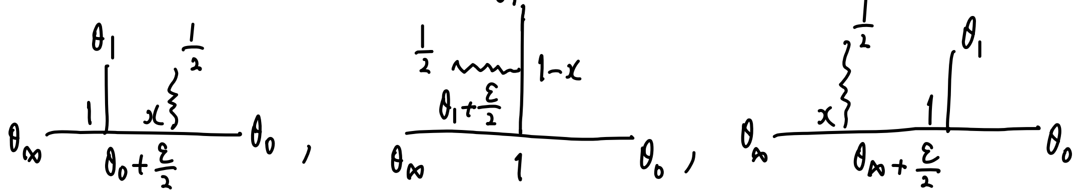
$$:= \Phi^{\Delta_3}_{\Delta_5\Delta_4}\left(\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(w-z)|\Delta_1\rangle, z\right)$$

上でΔ_1とΔ_2の立場を交換したもののつもり



$$:= \Phi^{\Delta_3}_{\Delta_5\Delta_4}\left(\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z-w)|\Delta_1\rangle, z\right)$$

昨日



が順にRiemannスキームが

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ \theta_0 & \theta_1 & -\theta_\infty+\frac{1}{2} \\ -\theta_0 & -\theta_1 & \theta_\infty+\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

であるような確定特異点型2階線形ODEの $x=0,1,\infty$ における局所解である。

以下, $c=1$とする。 今日は点をもう1つふやす。

$$\Phi^{\theta_2^2}_{\theta_3^2,\theta_1^2}(z)|\theta_1^2\rangle = N(\theta_3,\theta_2,\theta_1)\, z^{\theta_3^2-\theta_2^2-\theta_1^2}\left(|\theta_3^2\rangle + O(z)\right),$$

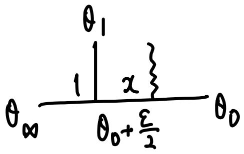
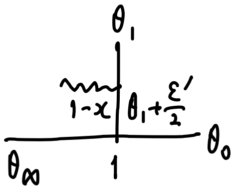
[Iorgov-Lisovyy-Teschner 2015]

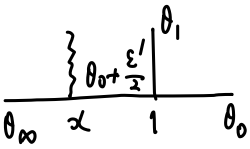
$$N(a,b,c) = \frac{G(1+a+b+c)\,G(1-a+b+c)\,G(1+a+b-c)\,G(1-a+b-c)}{G(1-2a)\,G(1+2b)\,G(1+2c)}.$$

接続行列を周期的にするためにこのように正規化しておく。ここで, $G(x)$はBarnesのG函数である; $G(x+1)=\Gamma(x)G(x)$, $G(1)=1$ (しか使わない).

Rem. Selberg積分のΓ函数表示をG函数で書き直すと上のNになる. □

上の normalization のもとで,

 $= \sum_{\varepsilon'=\pm 1}$  $F_{\varepsilon'\varepsilon}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \theta_1 \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{bmatrix}$,

$= \sum_{\varepsilon'=\pm 1}$  $B_{\varepsilon'\varepsilon}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \theta_1 \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{bmatrix}$,

コンピューターで計算
Mathematicaで
数時間試行サクゴ
してみつけた.
チェックはやさしい.

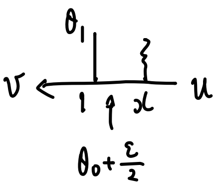
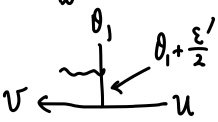
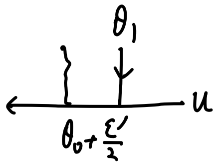
ここで,

$$F\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \theta_1 \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi \sin 2\pi\theta_0}\begin{bmatrix} \cos\pi(\theta_\infty+\theta_1-\theta_0)\cos\pi(-\theta_\infty+\theta_1-\theta_0) & \cos\pi(\theta_\infty+\theta_1+\theta_0)\cos\pi(-\theta_\infty+\theta_1+\theta_0) \\ -\pi^2 & \pi^2 \end{bmatrix},$$

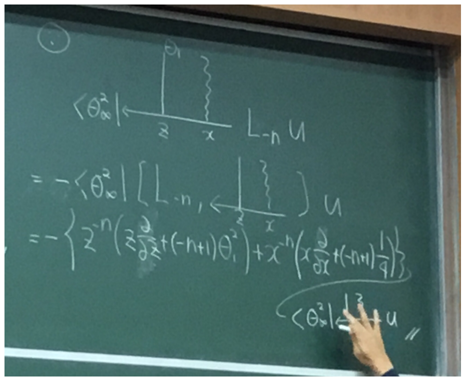
$$B\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \theta_1 \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{bmatrix} = \frac{-i}{\sin 2\pi\theta_0}\begin{bmatrix} -e^{\pi i(\theta_\infty-\theta_0)}\cos\pi(\theta_\infty-\theta_1+\theta_0) & e^{\pi i(-\theta_\infty-\theta_0)}\cos\pi(\theta_\infty-\theta_1-\theta_0) \\ -e^{\pi i(\theta_\infty+\theta_0)}\cos\pi(\theta_\infty+\theta_1-\theta_0) & e^{\pi i(-\theta_\infty+\theta_0)}\cos\pi(\theta_\infty+\theta_1+\theta_0) \end{bmatrix}.$$

Rem. $B\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \theta_1 \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{bmatrix}$, $e^{\pi i\theta_1}F\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \theta_1 \\ \theta_\infty & \theta_0 \end{bmatrix}$ は $\theta_0, \theta_1, \theta_\infty$ について周期1を持つ. ($\theta_i \mapsto \theta_i + 1$ で不変)

Prop. $u \in M_{\theta_0^2}$, $v \in M^*_{\theta_\infty^2}$ に対して,

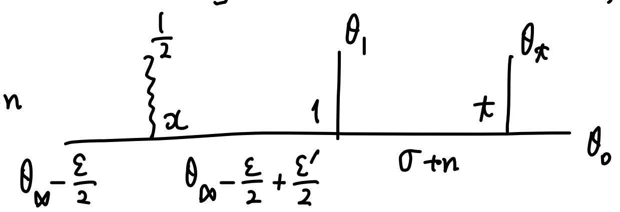
 $= \sum_{\varepsilon'=\pm 1}$  $F_{\varepsilon'\varepsilon} = \sum_{\varepsilon'=\pm 1}$  $B_{\varepsilon'\varepsilon}$

Proof 上の $F_{\varepsilon'\varepsilon}$, $B_{\varepsilon'\varepsilon}$ は $u = |\theta_0^2\rangle$, $v = \langle\theta_\infty^2|$ の場合に出て来た量である.
一般の u, v については vertex operator の定義より,
$u = |\theta_0^2\rangle$, $v = \langle\theta_\infty^2|$ の場合に帰着する. □



$\boxed{\text{Th.}}$ [Iorgov-Lisovyy-Teschner 2015] $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$ について,

$$Y_{\varepsilon\varepsilon'}(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n$$



← Fourier級数

が $s \in \mathbb{C}$ について収束していると仮定すれば, これは Riemann スキームが

← 収束性を仮定して解析接続を使う

s と σ が正準座標

$$\left\{\begin{matrix} 0 & t & 1 & \infty \\ \theta_0 & \theta_t & \theta_1 & \theta_\infty + \frac{1}{2} \\ -\theta_0 & -\theta_t & -\theta_1 & -\theta_\infty + \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

であるような次の線形ODEのモノドロミー不変な基本解になっている.

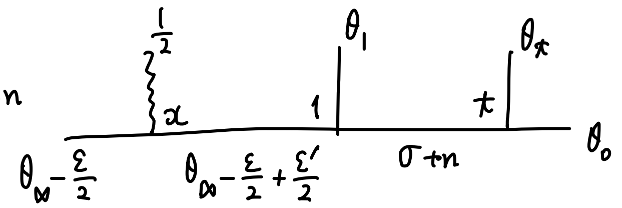
$$\frac{dY}{dx} = \left[\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_t}{x-t}\right] Y.$$

ここで,

A_i : 2×2行列, A_i は対角化可能, A_i の固有値は $\pm\theta_i$ ($\theta_i \notin \mathbb{Z}$). $\square$

$\boxed{\text{Rem.}}$

$$Y_{\varepsilon\varepsilon'}(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n$$



← Fourier級数

これの次の部分が τ である;

$$\tau_{\varepsilon\varepsilon'}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n$$

← Fourier級数 $\square$

$\boxed{\text{[Bershtein - Shchekin 2015]}}$

$\mathrm{Vir} \oplus \mathrm{Vir} \subset \mathrm{NSR}$ ← super Vir, NS sector (N=1 super-Vir.)

$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \Phi_m \otimes \Phi_n = \Phi$ ← vertex operator

τのみの微分方程式の方（パラメーターのずれを含まない）

これを使って $\tau_{\mathrm{VI}}(t)$ が1本のbilinear eq. をみたすことを示している。

(しかし, bilinear eq. が1本だけでは τ函数は決まらない。)

これを使うと bilinear eq. は自明に出る。

しかし, $\tau_{\mathrm{VI}}(t)$ になっていることはめんどう。

本当は左辺は $\sum_{m,n} l_{m,n} \Phi_m \otimes \Phi_n$ と係数が入る。$l_{m,n}$ が Barnes の G で書けることをしっかりやっている。

超幾何の接続問題を使う。

$\boxed{\text{[Gavrylenko - Iorgov - Lisovyy arXiv:18109608]}}$

W_N-algebra with $c=N-1$ を用いて, W_N conformal blocks で Fuji-Suzuki-Tsuda の τ函数を構成。 $A_i : N\times N$, $A_0, A_\infty \sim (1^N)$, $A_1, A_t \sim (N-1, 1)$

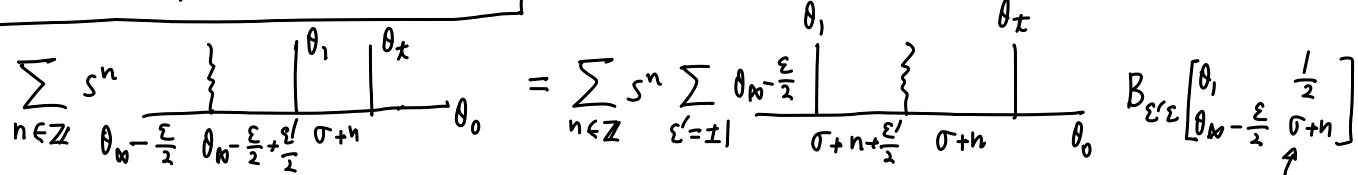
固有値はすべて異なる　　固有値は1個しかない。

Th.の証明の概要

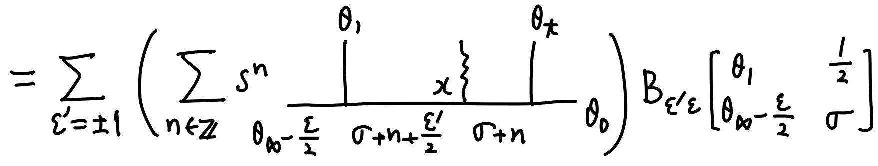
$x=\infty$での特性指数

$$x^{(\theta_\infty-\frac{\varepsilon}{2})^2-\frac{1}{4}-(\theta_\infty-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon'}{2})^2}=x^{-\varepsilon'\theta_\infty-\frac{1}{2}}\quad \underline{\text{OK}}$$

足し上げたものに接続行列を使うと

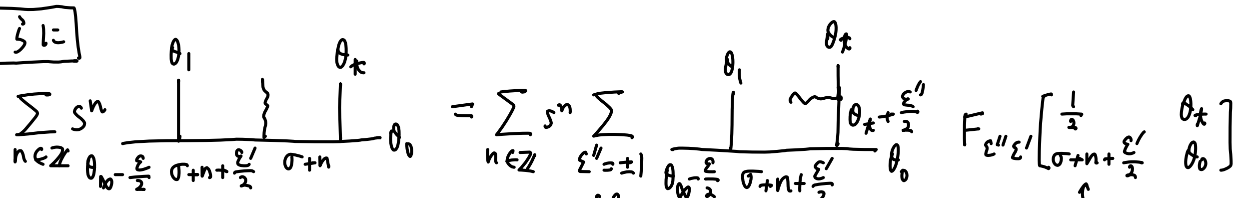


nによらない!!!

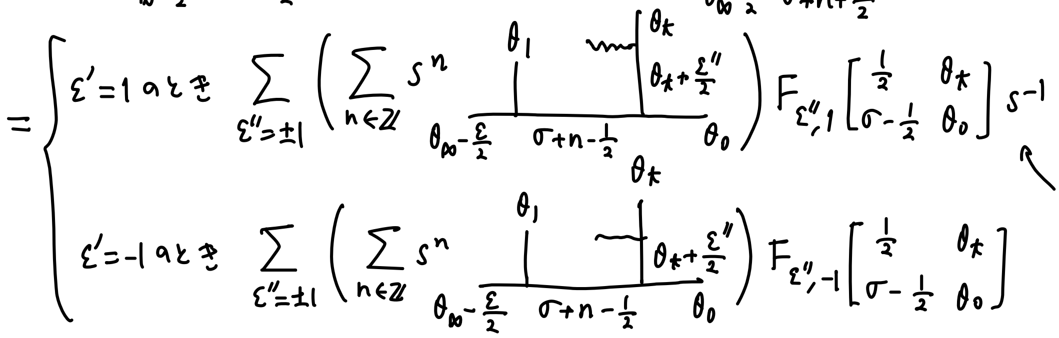


$x^{(\sigma+n+\frac{\varepsilon'}{2})-\frac{1}{4}-(\sigma+n)^2}=x^{\varepsilon'(\sigma+n)}$ のモノドロミーはnによらない. $\boxed{\text{OK}}$

さらに



nによらない!!!



← nをひとつずらした.

Yの接続行列にsも出て来る.

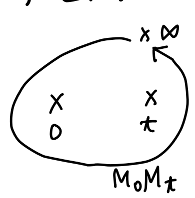
特性指数 $(t-x)^{\varepsilon''\theta_t}$ $\boxed{\text{OK}}$

こんな感じで, 和を取った結果のxについての解析接続が(和を取った結果)×(接続行列)の形になることをすべて確認できる. このことより, Yがxについて線形常微分方程式をみたすことがわかる. □

Report $\mathrm{tr}(M_0M_t)=2\cos 2\pi\sigma$ を確かめよ. (tによらない.)

ここでM_iはYのモノドロミー行列である. ただし, M_0M_tは次の図の道に対する$Y(x,t)$のモノドロミー行列.

x平面



□

$\boxed{\text{[Jimbo-Miwa-Ueno 1981]}}$ [JMU 1981]より，τ函数は基本解から次のように定まる．

基本解 $Y(x,t)$ を $x=t$ で次のように normalize しておく：

$$Y(x,t) = \left(I + Y_1(x-t) + O((x-t)^2)\right) \times (x-t)^T, \quad T := \begin{bmatrix}\theta_t & 0 \\ 0 & -\theta_t\end{bmatrix} - \frac{1}{2}I.$$

Riemann スキームは

$$\begin{Bmatrix} 0 & t & 1 & \infty \\ \theta_0 & \theta_t - \frac{1}{2} & \theta_1 & \theta_\infty + 1 \\ -\theta_0 & -\theta_t - \frac{1}{2} & -\theta_1 & -\theta_\infty + 1 \end{Bmatrix}$$

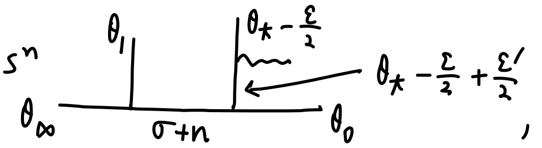
であるとする．このとき，$\tau = \tau(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; t)$ で次をみたすものをとれる：

$$\frac{\partial}{\partial t}\log\tau = \mathrm{tr}(TY_1).$$

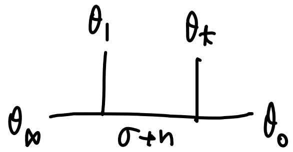
この τ を τ函数と呼ぶ（定義）．

($\boxed{\text{Rem.}}$ bilinear eq. を出すには異なる点での展開を比較する．A_i は共通．□)

上で使った $x=t$ で正規化された解を conformal blocks で表わすと，次のようになる：

$$Y_{\varepsilon\varepsilon'}(x,t) := \frac{1}{\tilde{\tau}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n$$ 

,

$$\tilde{\tau} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n$$ 

← 実はこれがτになる．

$T = \begin{bmatrix}\theta_t & 0 \\ 0 & -\theta_t\end{bmatrix} - \frac{1}{2}I$ なので，この Y に関する Y_1 の対角成分を求めればτについてもわかる．

Y_1 の対角成分は次のように計算される．($x-t$ に関する1次の係数) × $\tilde{\tau}$ は

前にやった

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n \langle \theta_\infty^2 | \Phi^{\theta_1^2}_{\theta_\infty^2, (\sigma+n)^2}(1)\, \Phi^{\theta_t^2}_{(\sigma+n)^2, \theta_0^2}(c_1 L_{-1}|\theta_t^2\rangle, t) | \theta_0^2\rangle, \qquad c_1 = \frac{\theta_t^2 + \frac{1}{4} - (\theta_t - \frac{\varepsilon}{2})^2}{2\theta_t^2} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\theta_t}.$$

なので，

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{\tilde{\tau}_t}{\theta_t} & * \\ * & \frac{-1}{2}\frac{\tilde{\tau}_t}{\theta_t}\end{bmatrix}\frac{1}{\tilde{\tau}}.$$

$$\therefore\ \mathrm{tr}(TY_1) = \frac{\tilde{\tau}_t}{\tilde{\tau}}\left(\frac{\theta_t - \frac{1}{2}}{2\theta_t} - \frac{-\theta_t - \frac{1}{2}}{2\theta_t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\log\tilde{\tau}.$$

ゆえに，$\tau = \tilde{\tau}$ ととれる!!!

$\boxed{\text{Rem.}}$ $\tau = \tau(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty; t)$ は 変形される線形ODEを決めるパラメーター $\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty$ だけではなく, パラメーター (σ, s) を含む. P_{VI}方程式は非線形な2階のODEであった. 解にはパラメーターが2つ入る. それが σ と s である. □

$\boxed{\text{Rem.}}$ Barnes の G を使った normalization の部分をパラメーターを2つつぶして特殊化すると有限和になって超幾何が出て来る. □

$\boxed{\text{明日}}$ これの q-version を明日やる. 接続行列が "n" によらないことだけが本質的. □

$\boxed{\text{以上は } P_{VI} \text{ の場合 他の } P_V, \dots}$ ← $\Lambda = (\Lambda_r, \dots, \Lambda_{2r}) \in \mathbb{C}^{r+1}$

Irregular Verma module $M_\Lambda^{[r]}$ of (Poincaré) rank $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は, Vir の表現で $0 \neq |\Lambda\rangle \in M_\Lambda^{[r]}$ で $L_n|\Lambda\rangle = \Lambda_n|\Lambda\rangle$ $(n = r, r+1, \dots, 2r)$, $L_n|\Lambda\rangle = 0$ $(n > 2r)$ をみたすものから生成され, $L_{-i_1+r} \cdots L_{-i_k+r}|\Lambda\rangle$ $(i_1 \geq \dots \geq i_k > 0)$ を基底とするもののことであると定める.

$\boxed{\text{Def.}}$ vertex operator $\Phi_{\Lambda'\Lambda}^{\Delta}(z) : M_\Lambda^{[r]} \to M_{\Lambda'}^{[r]}$ を次で定める:

① $[L_n, \Phi_{\Lambda'\Lambda}^{\Delta}(z)] = z^n\left(z\frac{\partial}{\partial z} + (n+1)\Delta\right)\Phi_{\Lambda'\Lambda}^{\Delta}(z)$

② $\Phi_{\Lambda'\Lambda}^{\Delta}(z)|\Lambda\rangle = z^\alpha e^{\sum_{i=1}^{r}\beta_i z^{-i}} \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$, $v_0 = |\Lambda'\rangle$, $v_n \in M_{\Lambda'}^{[r]}$. □

$\boxed{\text{Th.}}$ ([Nagoya 2015]) $\Lambda_{2r} \neq 0$ であるとき, $\Phi_{\Lambda'\Lambda}^{\Delta}(z)$ は一意的に存在する. さらに $\Lambda'_n = \Lambda_n - \delta_{nr}\beta_r$ $(n = r, r+1, \dots, 2r)$, $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}$ は $\Delta, \beta_r, \Lambda_r, \dots, \Lambda_{2r}$ の多項式,

$v_n = \sum_{|\lambda| \leq n} c_\lambda^{(n)} L_{-\lambda}|\Lambda'\rangle$, $L_{-\lambda} = L_{-\lambda_1+r} \cdots L_{-\lambda_k+r}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$,

$c_\lambda^{(n)}$ は $\Delta, \beta_r, \Lambda_r, \dots, \Lambda_{2r}, c$ の多項式. □

$\boxed{\text{Th. [Lisovyy-Nagoya-Roussilon]}}$

← P_V の解を決めるパラメーターが (s,β)

$$\tau_V(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{n(n+1)} s^n \times \prod_{\varepsilon=\pm1}\Big(G(1+\varepsilon\theta_0+\theta-\beta-n)\, G(1+\theta_t+\varepsilon(\beta+n))\Big)$$

$$\times \langle\theta_0^2| \cdot \Big(\Phi^{\theta_t^2}_{(\theta-\beta-n,\frac14),(\theta,\frac14)}\Big(\frac1t\Big)\Big|\theta,\frac14\Big\rangle\Big)$$

$t=i\infty$ での展開

$\langle\theta_0^2| \in M^*_{\theta_0^2}$ ← 確定特異点

$|\theta,\frac14\rangle$ ← Poincaré rank 1 不確定特異点

と P_V の τ 函数を書ける　Hを

$$H = \frac{\partial}{\partial t}\log\Big(t^{-2\theta_t^2-\frac{\theta^2}{2}}\, e^{-\frac{\theta}{2}t}\, \tau_V(t)\Big)$$

(P_V は $\dfrac{dY}{dx} = \Big(\dfrac{A_0}{x}+\dfrac{A_1}{x-1}+B\Big)Y$ の モノドロミー保存変形)

とおくと, Hは次をみたす:

$$(tH'')^2 - (H - tH' + 2(H')^2)^2 + \frac14\big((2H'-\theta)^2 - 4\theta_0^2\big)\big((2H'+\theta)^2 - 4\theta_t^2\big) = 0.$$

$\boxed{\text{質問}}$　τはどのように出て来たか?

$\boxed{\text{回答}}$